

MP 11-12

Le **TD de révision sur l'électrostatique** est à préparer pour le jour de la rentrée 2011.

Le **TD de révision sur la mécanique du point** est à préparer pour le jeudi 15 septembre 2011.

Le **TD de révision sur la magnétostatique** est à préparer pour le jeudi 22 septembre 2011.

Sont à réviser et à apprendre pour la rentrée :

- les rappels d'électrostatique (pages 1, 2, 3 et 4 du chapitre « formulation locale des lois de l'électrostatique »).
- le document « circulation et flux ».
- le document « gradient ».

Vous aurez **au programme de colle, en révision de première année :**

- pour la première quinzaine :
 - en physique : toute l'électrostatique de sup (dont l'étude complète du dipôle électrostatique),
 - en chimie : cinétique chimique : vitesses de réaction (i.e. toute la cinétique chimique sauf les mécanismes réactionnels)
- Pour la deuxième quinzaine :
 - en physique : la mécanique de sup avec en particulier l'étude des oscillateurs.
 - en chimie : cinétique chimique : les mécanismes réactionnels
- Pour la troisième quinzaine :
 - en physique : la magnétostatique des circuits filiformes (champ magnétique, loi de Biot et Savart, étude des symétries et invariances, conservation du flux, théorème d'Ampère),
 - en chimie : classification périodique des éléments.

Il y aura bien sûr aussi au programme de ces colles, des chapitres de seconde année!

ÉLECTROSTATIQUE- RÉVISIONS

I Symétries et invariances

1. Un cylindre de longueur L , d'axe Oz ($z \in [-L/2, L/2]$) et de rayon a porte la charge surfacique $\sigma(M) = \sigma_0 \sin^2 \theta$ (en coordonnées cylindriques d'axe Oz).

Etudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges. Conclure sur le champ électrique créé par cette distribution.

2. Un fil de longueur infinie selon Oz porte la charge linéique $\lambda(z) = \lambda_0 \cos(2\pi z/b)$, où b est une longueur caractéristique de la distribution.

Etudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges. Conclure sur le champ électrique créé par cette distribution.

3. On considère un doublet constitué de deux charges opposées : $q > 0$ située en $P(a > 0, 0, 0)$ et $-q$ située en $N(-a, 0, 0)$ en coordonnées cartésiennes.

Etudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges. Conclure sur le champ électrique créé par cette distribution.

II Champ créé par quatre charges ponctuelles

Quatre charges de valeur respectives q , q , q' et q' sont disposées respectivement aux quatre coins d'un carré $A(-a, -a, 0)$, $B(-a, a, 0)$, $C(a, a, 0)$ et $D(a, -a, 0)$. On donne $a = 1$ m, $q = 2 \cdot 10^{-7}$ C et $q' = 1 \cdot 10^{-7}$ C.

1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ créé par cette distribution au point $O(0, 0, 0)$.
2. Déterminer sa norme.

III Champ sur le plan médiateur d'un fil

Un fil de longueur L porte la charge linéique uniforme λ .

1. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ qu'il crée en tout point M de son plan médiateur.
2. Discuter des cas $L \gg r$ (fil infini) et $r \gg L$, où r est la distance de M au fil.

IV Champ sur l'axe d'un anneau chargé

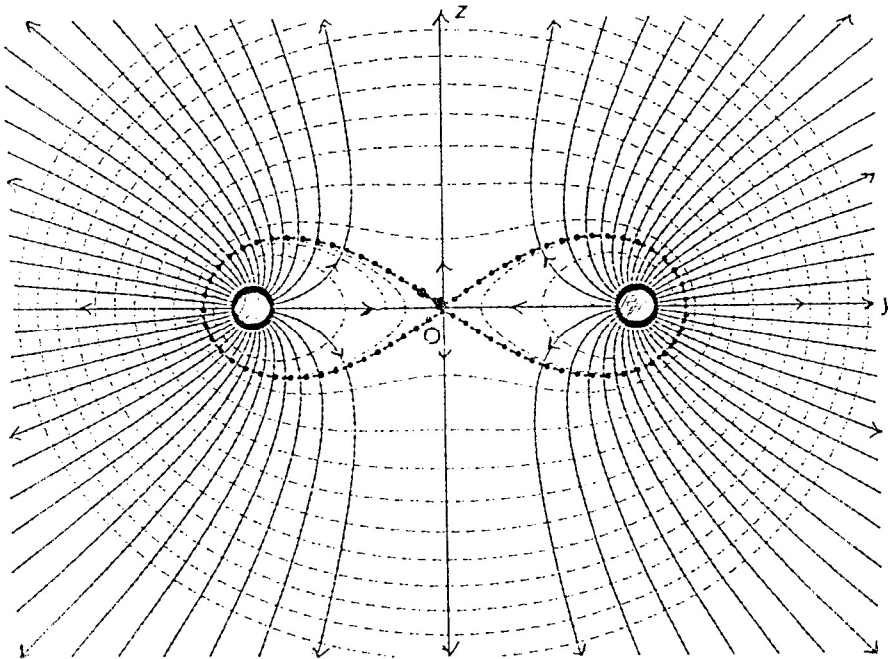
On considère une distribution continue constituée de charges réparties uniformément avec la densité linéique de charge λ , sur une spire de centre O , d'axe de révolution Oz et de rayon a .

On considère le système de coordonnées cylindriques d'axe Oz .

1. En un point $M(\rho, \theta, z)$, quelles sont les composantes du champ qui sont nulles? Les composantes non nulles dépendent-elles de ρ ? de θ ? de z ?
2. Répondre aux mêmes questions en un point M de l'axe, de cote z ($\rho = 0$).
3. Dans ce dernier cas :
 - a) Déterminer complètement le champ électrostatique en un point M de l'axe, de cote z positive.

- b) En déduire le champ en un point de l'axe de cote négative.
- c) Quelle est la norme du champ en fonction de la distance de M à O? L'exprimer en fonction de la charge totale Q de l'anneau.
- d) Proposer des moyens de contrôler la pertinence du résultat.

V Champ et potentiel d'un anneau chargé ; topographie



La figure ci-dessus représente la carte des lignes de champ (fléchées) et des sections des équipotentielles (en pointillés) dans un plan passant par l'axe d'un anneau circulaire de rayon a chargé uniformément.

1. Commenter l'allure des lignes de champ et des sections des surfaces équipotentielles :
 - du point de vue des symétries
 - sur l'axe
 - au voisinage de l'anneau
 - à grande distance de l'anneau
2. Commenter l'existence du point de champ nul O et de l'équipotentielle « critique » correspondante.

VI Distributions à symétrie cylindrique

On considère un cylindre infini d'axe Oz et de rayon a . Calculer le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace dans les cas suivants :

1. Le cylindre porte la charge volumique ρ_0 uniforme.
2. Le cylindre porte la charge volumique $\rho(r)=\rho_0 r/a$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.
3. La cylindre porte la charge surfacique σ_0 uniforme.

VII Surface plane illimitée

En utilisant le théorème de Gauss, calculer en un point M quelconque de l'espace, le champ créé par un plan uniformément chargé en surface, de densité de charge σ .

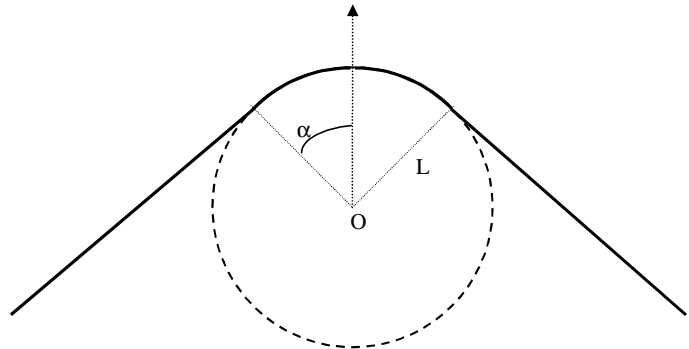
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL-RÉVISIONS

I Cascade

Une automobile assimilée à un point matériel, circule à la vitesse v uniforme, sur une piste au profil accidenté. Elle franchit une bosse modélisée par deux portions rectilignes raccordées par un arc de cercle de rayon L et d'ouverture angulaire 2α .

A quelle condition garde-t-elle le contact avec le sol?

Données : $\alpha = 10^\circ$; $L = 5$ m



II Voyage en ballon

Un ballon gonflé à l'hélium a perdu du gaz. Il est accéléré vers le sol avec une accélération a .

La masse totale étant m , déterminer la masse de lest m_1 qui doit être jetée par les astronautes pour que le ballon acquiert une accélération de même valeur absolue, mais vers le haut.

On négligera les frottements et on supposera que la variation de volume est négligeable lorsque le lest est jetée, c'est-à-dire que la poussée d'Archimède (force orientée vers le haut, de norme égale à celle du poids de l'air déplacé) reste la même.

III Solide sur un sol vibrant

On considère un solide assimilé à une masse ponctuelle M posé sur un sol plan et horizontal. Les mouvements du sol et de la masse sont supposés purement verticaux. L'axe Oz de vecteur unitaire \vec{u}_z est orienté vers le haut; on note $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ l'accélération de la $g = 9,81$ m.s⁻². A partir de l'instant $t=0$, le sol est animé de vibrations verticales d'élongation :

$$z_s(t) = z_0 (1 - \cos \omega t)$$

1. Ecrire l'équation du mouvement de la masse M .
2. Montrer qu'il existe deux régimes pour la réaction du support, en fonction des caractéristiques de la vibration ω et z_0 . Donner la valeur a_M de l'amplitude de l'accélération $a_s(t)$ du sol qui sépare les deux régimes.
3. Dans le cas où $|a_s(t)| > |a_M|$, montrer que la masse quitte le sol pour une altitude z_D que l'on déterminera.
4. En déduire l'altitude maximale atteinte z_M par la masse M en fonction de z_0 , ω et g .

IV Anneau coulissant sur un cercle en rotation

On considère un anneau M de masse m assimilé à un point matériel, astreint à se déplacer le long d'un cerceau de centre O , de rayon R , en rotation autour de son diamètre vertical fixe AB , à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ où \vec{u}_z est un vecteur unitaire vertical ascendant.

On pose $\theta = (\vec{g}, \vec{OM})$ où \vec{g} est le champ de pesanteur.

1. Déterminer les positions d'équilibre relatif de l'anneau.
2. Etudier leur stabilité.

V Ressort dont une extrémité coulisse sur une tige

On considère un repère cartésien $(Oxyz)$ du référentiel terrestre, Oz étant vertical ascendant.

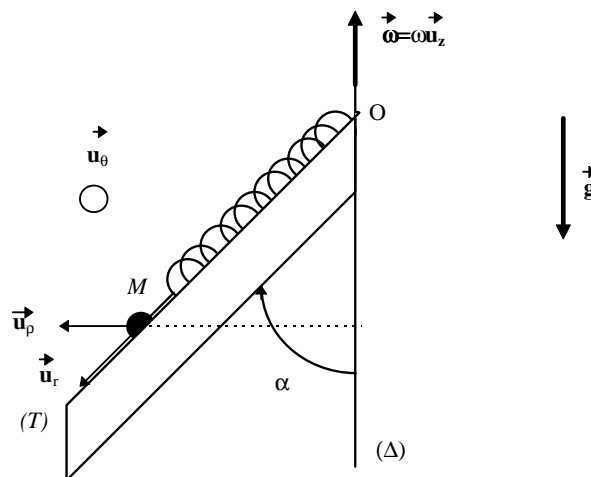
Un anneau assimilable à un point matériel M , de masse m , glisse sans frottement sur un axe horizontal Ox . Il est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k , de longueur à vide l_v , dont l'autre extrémité a pour coordonnées $(0,0,-a)$, « a » étant une longueur inférieure à la longueur à vide l_v .

1. Exprimer l'énergie potentielle du point matériel en fonction de son abscisse x , et de k , a et l_v .
2. Tracer l'allure du graphe $E_p(x)$.
3. Trouver les positions d'équilibre possibles et étudier leur stabilité.
4. Le point matériel est lâché avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ ($v_0 > 0$) de la position initiale M_0 d'abscisse $x_0 > 0$.
 - a) Quelle est l'énergie mécanique initiale E_{m0} du point matériel?
 - b) Quelle est l'évolution de son énergie mécanique au cours du temps?
 - c) Étudier qualitativement le mouvement : préciser la portion de la tige que l'anneau va décrire, en distinguant deux cas.

VI Mouvement sur une glissière tournante

Un système est constitué d'une glissière (T) soudée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical (Δ) . Cette glissière est inclinée d'un angle α fixe par rapport à la verticale (figure ci-dessous).

Sur la glissière, est posée un solide (S) de masse m , qui peut glisser sans frottement sur la glissière. Ce solide, que l'on assimilera à un point matériel M , est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur k , de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixée au bâti.



1. Le système est tout d'abord immobile dans le référentiel du laboratoire \mathfrak{R} supposé galiléen. Déterminer la longueur l_e du ressort à l'équilibre.
2. Le système est mis en rotation autour de l'axe vertical (Δ) avec une vitesse angulaire constante ω suffisamment faible pour que (S) reste au contact de (T) . On étudie le solide (S) lorsque le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre notée l_e' .
 - a) Etude dans le référentiel du laboratoire.
 - i) Exprimer le vecteur accélération \vec{a} du solide (S) dans \mathfrak{R} en fonction de l_e' et des données (On pourra utiliser la base locale des coordonnées cylindriques de M , $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$).
 - ii) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel du laboratoire, et en la projetant sur le vecteur \vec{u}_r , déterminer la longueur l_e' en fonction des données.
 - iii) Déterminer la réaction de la glissière sur (S) (direction, sens et norme).
 - b) On considère le référentiel \mathfrak{R}' lié à la glissière.
 - i) Qu'appelle-t-on force d'inertie d'entraînement subie par le solide (S) ? L'exprimer en fonction de l_e' et des données.
 - ii) Qu'appelle-t-on force d'inertie de Coriolis subie par le solide (S) ? La déterminer.
 - iii) Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel \mathfrak{R}' et retrouver les résultats du a) ii) et iii).

La vitesse de rotation du système est maintenant ω_0 . Elle est telle que le solide décolle juste de la glissière quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre. Déterminer ω_0 .

VII Amortissement d'une voiture

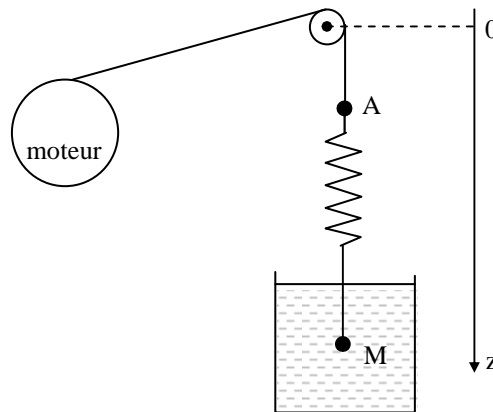
- La suspension d'une voiture automobile, de masse à vide $M = 600$ kg, est schématisée par un ressort de raideur k . On constate que les roues, dont on négligera la masse, quittent le sol lorsque la voiture est soulevée d'une hauteur $h = 30$ cm. On donne $g = 10$ m.s⁻².
 - Déterminer la raideur du ressort.
 - Déterminer l'équation du mouvement vertical, ainsi que la période des oscillations verticales de la voiture non chargée. Que devient la période avec 4 passagers de masse totale $m = 300$ kg?
- On ajoute à la suspension précédente, un amortisseur qui crée une force de frottement proportionnelle à la vitesse verticale $\vec{f} = -b\vec{v}$
 - Sans passager, le régime d'amortissement est critique. Ecrire l'équation du mouvement vertical. Déterminer le coefficient b .
 - La voiture contient 4 passagers. Déterminer l'équation du mouvement vertical; en déduire la pseudo-période T' ; la comparer à la période propre de l'oscillateur non amorti.

VIII Oscillations

Le solide M , de masse m , assimilable à un point matériel, est accroché à l'extrémité inférieure d'un ressort (k, l_0). On modélise l'action du fluide dans lequel il se déplace par la force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$. L'extrémité supérieure du ressort, A , est animé d'un mouvement vertical oscillant donné par :

$$z_A = Z_{Am} \cos(\omega t)$$

Donner l'équation différentielle du mouvement de M , puis l'amplitude du mouvement en fonction de ω .



IX Mouvement d'un électron

Un électron de charge $q \approx -1,6 \cdot 10^{-19}$ C et de masse $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, assimilé à un point matériel M , évolue dans le référentiel du laboratoire \mathfrak{R} supposé galiléen et muni d'un repère cartésien $Oxyz$, sous l'action d'un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_x$ et d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_y$, tous deux uniformes et stationnaires. On désigne par x , y et z les coordonnées cartésiennes de M dans \mathfrak{R} , et par $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ la vitesse initiale de M ; $v_0 = 500$ km.s⁻¹. On place en $z_0 = 10$ cm, un écran d'observation parallèle au plan xOy , destiné à intercepter M .

- Dans le cas où $B=0$ et $E=10$ V.m⁻¹, déterminer l'abscisse x_e de M sur l'écran.
- Dans le cas particulier où $E=0$ et $B=10^{-5}$ T, montrer que la trajectoire de l'électron est un cercle et calculer son rayon.
- Que vaut alors l'abscisse x_m de M sur l'écran?
- En supposant $E=1$ kV.m⁻¹, déterminer B afin que le mouvement de M soit rectiligne et uniforme.
- On suppose E et B non nuls et on pose $\omega_c = |q|B/m$. Montrer que l'équation différentielle d'évolution de l'abscisse x de M s'écrit sous la forme $\ddot{x} + \omega_c^2 x = a$ où a est une constante indépendante du temps que l'on déterminera.

9. On suppose $B=2E/v_0$. Exprimer $x(t)$.

X Système de deux corps isolés en interaction gravitationnelle

Deux corps assimilés à des points matériels A_1 et A_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , évoluent isolément du reste de l'univers sous la seule action des forces de gravitation qu'elles exercent l'une sur l'autre. On note C le centre de masse, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{CA_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{CA_2}$ les rayons vecteurs des deux corps et $G=6,67 \cdot 10^{-11}$ SI la constante de gravitation universelle.

Ce problème à deux corps se réduit dans le référentiel barycentrique \mathfrak{R}^* à l'étude du mouvement d'un point matériel fictif A appelé mobile réduit, de masse μ , de rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{CA} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, soumis à la force $\vec{F}_G = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r}$

1. Montrer que la vitesse du centre de masse C dans le référentiel de Copernic est constante.
2. Quelle est la masse réduite μ ?
3. Montrer que l'énergie mécanique de A se conserve ainsi que son moment cinétique. On notera $L_z \vec{u}_z$ ce vecteur constant.
4. Montrer que le mouvement de A est plan. On désigne par (r, θ) les coordonnées de A dans le plan de son mouvement.
5. Exprimer l'énergie mécanique de A en fonction des données, de r , θ et de leurs dérivées.
6. Exprimer l'énergie cinétique de A en fonction de r , $dr/d\theta$, μ et L_z .
7. En introduisant $u=1/r$, montrer que u vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p}$ et expliciter p .
8. Le corps A_1 est en fait une sonde interplanétaire et le corps A_2 la Terre. On suppose la masse de la sonde négligeable devant celle de la Terre. Montrer que la sonde se confond avec le mobile fictif A précédemment étudié et la Terre avec le centre de masse C du système. Calculer la vitesse de libération v_l de la sonde dans \mathfrak{R}^* à une altitude de 400km. On donne $m_2=5,98 \cdot 10^{24}$ kg masse de la Terre et $R_T=6470$ km rayon terrestre.

XI Caractéristiques de l'orbite du satellite Vanguard

Le satellite artificiel de la Terre Vanguard de masse $m = 1,5$ kg avait une période de révolution $T = 133,8$ min. Les vitesses maximale et minimale de ce satellite sur son orbite étaient respectivement $v_M = 8,20$ km/s et $v_m = 5,57$ km/s.

On donne le rayon de la Terre $R = 6360$ km, sa masse $M = 5,89 \cdot 10^{24}$ kg, la constante de gravitation universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ USI.

Déterminer littéralement puis numériquement :

1. l'excentricité e et le demi-petit axe b de l'orbite; on rappelle la surface d'une ellipse de demi-grand axe a et demi petit axe b : $S=\pi ab$; on donne également la distance entre le centre de l'ellipse et ses foyers en fonction de l'excentricité de l'ellipse et son demi-grand axe a : $c=e \cdot a$
2. le demi-grand axe a et le paramètre p de l'orbite, et vérifier ainsi que le satellite obéit à la troisième loi de Képler; on donne la relation entre a , b et c dans une ellipse : $b^2=a^2-c^2$ et la relation entre p (paramètre de l'ellipse), b et a : $p=b^2/a$.
3. les altitudes du périégée et de l'apogée de ce satellite;
4. l'énergie qu'on doit fournir pour obtenir une satellisation si la base terrestre de lancement est située en un lieu de latitude $\lambda = 30^\circ$;
5. l'altitude H à laquelle il a été placé sur orbite sachant que sa vitesse de mise sur orbite était $v_0 = 760$ km/h.

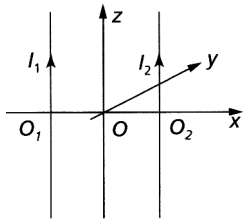
MAGNÉTOSTATIQUE-RÉVISIONS

I Symétries et invariances de distributions de courant filiformes

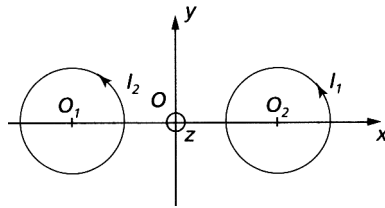
1. Etudier les symétries et les invariances des distributions (A) et (B) dans les cas suivants :

- a) $I_1=I_2$ b) $I_1=-I_2$ c) $|I_1| \neq |I_2|$

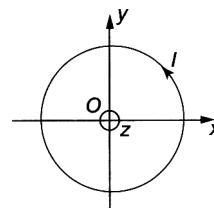
2. Etudier les symétries et les invariances des distributions (C) et (D).



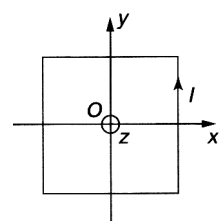
(A)



(B)



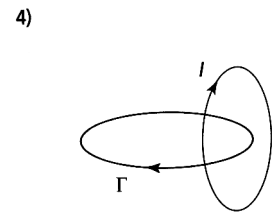
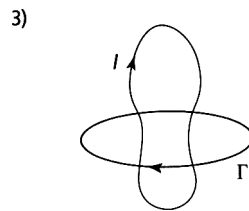
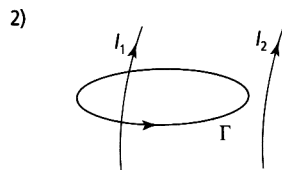
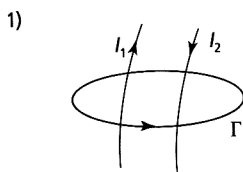
(C)



(D)

II Courants enlacés

On donne un contour orienté Γ . Calculer $I_{\text{enlacé}}$ dans chacun des cas suivants.



III Trois fils

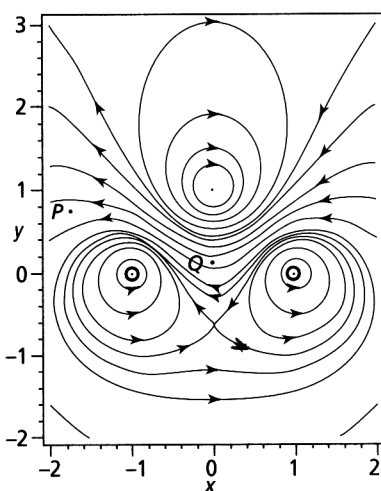


Figure A

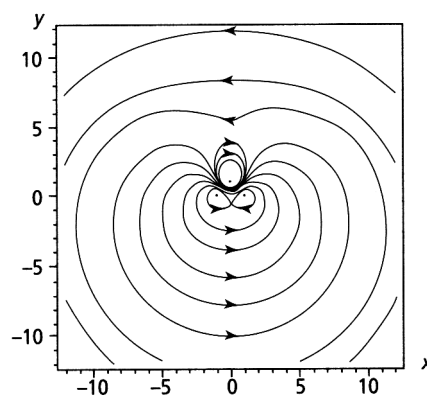


Figure B

On représente la carte du champ magnétique créé par trois fils rectilignes infinis parallèles, parcourus par des courants d'intensité I_1 , I_2 et I_3 , à une certaine distance (figure A), puis à une distance beaucoup plus grande (figure B).

1. Déterminer les positions des fils.
2. Y-a-t-il un point de champ nul?
3. Donner le plus d'informations possible sur les intensités I_1 , I_2 et I_3 .
4. Le champ magnétique en P vaut 0,2T. Evaluer sa valeur au point Q.

IV Champ magnétique d'une spire circulaire

Calculer le champ magnétique d'une spire circulaire de rayon R , de centre O , d'axe Oz , parcourue par un courant d'intensité I , en un point M de son axe. On l'exprimera en fonction de I , R et α , angle sous lequel depuis M on voit la spire, puis en fonction de I , R et z , cote de M .

$$\text{Réponse : } \vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-3/2} \vec{u}_z$$

V Champ d'un fil rectiligne illimité

Calculer, en utilisant la formule de Biot et Savart, le champ d'un fil rectiligne illimité Oz parcouru par un courant I , en un point M quelconque de coordonnées cylindriques d'axe Oz (ρ, θ, z).

$$\text{Réponse : } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{u}_\theta$$

VI Champ d'un solénoïde

On considère le solénoïde constitué d'un enroulement d'un grand nombre N de spires, sur un cylindre de révolution (non matériel) d'axe Oz , de rayon R , de longueur L . Les spires sont disposées régulièrement à raison de n spires par unité de longueur, où n est assez élevé pour qu'on puisse considérer chaque spire comme une spire plane. Ces spires planes sont parcourues par un courant d'intensité I , dans le sens correspondant au sens positif donné par \vec{u}_z , vecteur unitaire de Oz . L'origine de l'axe Oz est prise au milieu du solénoïde. On note z_1 et z_2 les cotes des spires extrêmes du solénoïde ($z_1 < 0$, $z_2 = -z_1 > 0$).

1. On considère un point M de l'axe du solénoïde. Déterminer la direction et le sens du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en M par le solénoïde.
2. Montrer que la composante B_z de $\vec{B}(M)$ s'écrit : $B_z = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$
où α_1 (respectivement α_2) est le demi-angle au sommet du cône de révolution de sommet M , s'appuyant sur la spire du solénoïde de cote z_1 (respectivement de cote z_2). Que vaut le champ au centre du solénoïde? A sa sortie?
3. On se place pour la suite dans le cas d'un solénoïde de très grande longueur. Préciser la direction du champ en un point quelconque et étudier les invariances de ce champ.
4. En appliquant le théorème d'Ampère à des contours bien choisis dans un plan méridien du solénoïde (plan contenant son axe), déterminer le champ magnétique créé par le solénoïde en tout point M de l'espace (non situé sur le solénoïde lui-même).

VII Champ d'un tore

Une bobine torique est constituée d'un enroulement continu de N spires circulaires de rayon a , toutes parcourues par le même courant d'intensité I , régulièrement enroulées sur un tore, de rayon moyen R , de section circulaire de rayon $a < R$.

1. Préciser la direction du champ magnétique créé par le tore en un point quelconque de l'espace et les invariances de ce champ.
2. Montrer que le champ magnétique est nul hors du tore.
3. Déterminer le champ magnétique en un point M situé à l'intérieur du tore, en fonction de sa distance ρ à l'axe du tore.
4. AN : $N = 1000$, $I = 1$ A, $R = 10$ cm, $a = 3$ cm. Quelles sont les valeurs extrêmes de la norme du champ magnétique? Quel courant devrait-on faire passer dans un fil rectiligne infini unique pour obtenir le même champ à la distance ρ du fil que dans le tore à la distance ρ de l'axe?

FORMULATION LOCALE DES LOIS DE L'ELECTROSTATIQUE

On appelle électromagnétisme, l'étude de l'ensemble des **phénomènes liés aux interactions entre particules chargées**.

Soit un ensemble D de particules chargées, mobiles ou non: D s'appelle "distribution de charges et de courants".

Une telle distribution modifie les propriétés de l'espace: on dit qu'elle crée un champ électromagnétique. L'action complète de D à un instant t , en un point M , caractérisé par un vecteur position \vec{r} , est décrite par deux vecteurs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ appelés composantes du champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ en M à t .

$$D \rightarrow [\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)]$$

cas général: $[\vec{E}, \vec{B}]$ solutions de 4 équations couplées, appelées équations de Maxwell (faisant intervenir à la fois des composantes de \vec{E} et de \vec{B} et leurs dérivées par rapport au temps ou aux coordonnées d'espace): phénomènes de propagation \rightarrow chapitres 4 à 8.

cas particulier: répartition des charges et des courants indépendante du temps: régime permanent: les équations vérifiées par \vec{E} et \vec{B} sont découplées, \vec{E} et \vec{B} peuvent être calculés séparément.

cas plus particulier: charges immobiles (pas de courants) $\vec{B} = \vec{0}$: électrostatique \rightarrow sup + chapitres 1 et 2

sinon: le champ électrique est permanent, le champ magnétique aussi: magnétostatique \rightarrow sup et chapitre 3.

cas moins particulier: la répartition des charges et des courants varie « lentement » dans le temps, \vec{E} et \vec{B} aussi: régime quasi-permanent ARQP (ou ARQS): propagation négligée, phénomènes d'induction \rightarrow TP d'élec, chapitres 3 et 9.

- ❖ Chapitre 1: Formulation locale des lois de l'électrostatique (lien entre sup et spé)
- ❖ Chapitre 2: Conducteurs en équilibre électrostatique. Condensateurs
- ❖ Chapitre 3: Compléments de magnétostatique. Equations locales
- ❖ Chapitre 4: Equations de Maxwell
- ❖ Chapitre 5: Propagation dans le vide. Structure de l'OEMPPV. Cas des ondes monochromatiques
- ❖ Chapitre 6: Energie électromagnétique
- ❖ Chapitre 7: Réflexion d'ondes; propagation guidée
- ❖ Chapitre 8: Rayonnement dipolaire
- ❖ Chapitre 9: Induction électromagnétique

I Rappels d'électrostatique

1. Loi Coulomb

Une charge q placée en S , exerce sur une charge Q située en P , la force $\vec{f} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{SP}\|^2} \cdot \frac{\vec{SP}}{\|\vec{SP}\|}$

2. Principe de superposition

Soit q_1 une charge ponctuelle en S_1 , q_2 une charge ponctuelle en S_2 , Q une charge ponctuelle en P .

Soit \vec{f}_1 la force qu'exercerait q_1 sur Q en l'absence de q_2 , \vec{f}_2 la force qu'exercerait q_2 sur Q en l'absence de q_1 .

Soit \vec{f} la force exercée par la distribution $\{q_1, q_2\}$ sur la charge Q .

$$\text{Principe de superposition} \quad \vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

3. Champ électrostatique

D'après la loi de Coulomb et le principe de superposition, la force exercée par une distribution de charges D , sur une charge "test" Q placée en un point P , est le produit de Q , par un vecteur ne dépendant pas de Q mais uniquement du lieu P et de la distribution source D . Ce vecteur est appelé champ électrostatique au point M de (créé par) la distribution D .

a) Champ en P d'une charge ponctuelle q placée en S

$$\vec{f} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{SP}\|^2} \cdot \frac{\vec{SP}}{\|\vec{SP}\|} = Q\vec{E}(P) \quad : \quad \vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{SP}\|^2} \cdot \frac{\vec{SP}}{\|\vec{SP}\|}$$

b) Champ en P d'une distribution de charges ponctuelles q_i placées en des points S_i

$$\vec{E}(P) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{S_i P}\|^2} \cdot \frac{\vec{S_i P}}{\|\vec{S_i P}\|}$$

c) Champ en P d'une distribution continue de charges

$$\vec{E}(P) = \int_{S \in D} \frac{dq(S)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{SP}\|^2} \cdot \frac{\vec{SP}}{\|\vec{SP}\|}$$

avec $dq = \rho d\tau$ pour une distribution volumique, σdS pour une distribution surfacique, λdl pour une distribution linéique.

4. Propriété du champ électrostatique

a) Propriétés de symétrie

- Définition : Une distribution D possède un plan de symétrie Π si la distribution image D' obtenue par une symétrie de D par rapport à Π , coïncide avec D. (même géométrie et mêmes charges).

Propriétés :

❖ En un point M d'un plan de symétrie Π d'une distribution source D, le champ créé par D appartient à ce plan : $M \in \Pi \Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi$. exemple : D ensemble de deux charges ponctuelles identiques.

❖ En M', symétrique de M par rapport à un plan de symétrie Π , le champ est le symétrique par rapport à Π du champ en M.

- Définition : Une distribution D possède un plan d'anti symétrie Π^* si l'opération de symétrie de D par rapport à Π , laisse la géométrie inchangée mais change le signe des charges.

Propriétés :

❖ En un point M d'un plan d'anti symétrie Π^* d'une distribution source D, le champ créé par D est normal à ce plan : $M \in \Pi^* \Rightarrow \vec{E}(M) \perp \Pi^*$. exemple : D ensemble de deux charges ponctuelles opposées.

❖ En M', symétrique de M par rapport à un plan d'anti symétrie Π^* , le champ est l'opposé du symétrique par rapport à Π^* du champ en M.

- Le champ d'une distribution source D possède les mêmes propriétés d'invariance que D.

exemple : D cylindre « infini », uniformément chargé, d'axe Oz : D est invariante par rotation autour de Oz; les composantes de \vec{E} sont donc indépendantes de θ (deuxième coordonnée cylindrique d'axe Oz). En outre D est invariante par translation le long de Oz; les composantes de \vec{E} sont donc indépendantes de z.

b) Existence du potentiel électrostatique

On montre (en partant du cas d'une charge ponctuelle et en utilisant le principe de superposition), que le champ électrostatique est un champ de gradient, c'est-à-dire qu'il existe un champ scalaire V(P) tel que : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

Distribution de charges ponctuelles q_i placées en des points S_i

$$V(P) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{S_i P}\|}$$

Distribution continue de charges :

$$V(P) = \int_{S \in D} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 SP} \text{ avec } dq = \rho d\tau, \sigma dS \text{ ou } \lambda dl$$

Rappel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Leftrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \Leftrightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta V = V(A) - V(B)$

c) Théorème de Gauss

Le flux à travers une surface fermée imaginaire Σ , du champ créé par une distribution source D, est égal au quotient par ϵ_0 de la somme des charges de D situées à l'intérieur de Σ .

$$\oiint_{P \in \Sigma} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Ce théorème se démontre en partant d'une charge ponctuelle et en utilisant le principe de superposition.

d) Energie potentielle électrostatique

Soit Q une charge "test" se déplaçant dans le champ électrostatique d'une distribution source D. La force de Coulomb qu'elle subit peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f} = Q\vec{E} = -Q\vec{\text{grad}}V = -\vec{\text{grad}}E_p \quad \text{avec} \quad E_p = QV$$

E_p est l'énergie potentielle de la charge Q en P, c'est le produit de la charge Q par le potentiel électrostatique en P.

Rappel: $\vec{f} = -\vec{\text{grad}}E_p \Leftrightarrow \vec{f} \cdot d\vec{l} = -dE_p \Leftrightarrow \int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{l} = -\Delta E_p \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{f}) = E_p(A) - E_p(B)$

5. Dipôle électrostatique

a) Définition

Un dipôle électrostatique est une distribution formée de 2 charges opposées, q (positive, placée en P) et -q (placée en N), dont la distance mutuelle NP est très faible devant la distance r à laquelle on étudie les effets du dipôle.

Remarque : la distribution source est invariante par rotation autour de la droite NP. On choisit donc cette droite comme axe Oz pour définir les coordonnées sphériques de centre O, O étant le milieu de NP. Le plan contenant un point M quelconque et les deux points N et P est plan de symétrie de la distribution : le champ en M appartient à ce plan : sa composante E_φ est nulle. La distribution étant invariante par rotation autour de NP, le potentiel et les composantes non nulles du champ en un point M(r,θ,φ) sont indépendantes de la coordonnée φ.

b) Moment dipolaire

$$\vec{p} = q\vec{NP}$$

c) Potentiel créé

En M(r,θ,φ), on calcule $V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

d) Champ créé

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{array} \right.$$

e) Action d'un champ extérieur sur le dipôle rigide

- Résultante $\vec{f} = (\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}_{\text{ext}}$ (la connaissance de cette formule n'est pas exigée).

Dans le cas d'un champ extérieur uniforme, cette résultante est nulle : l'action du champ extérieur se réduit à un couple : si \vec{E}_{ext} est uniforme, $\vec{f} = \vec{0}$.

- Moment des forces $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$
- Energie potentielle du dipôle : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$. En effet :

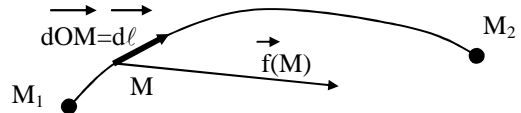
$$E_p = -qV_N + qV_P = q(V_P - V_N) = q \int_N^P dV = q \int_N^P \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = -q \int_N^P \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l} = -q \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \int_N^P d\vec{l} = -q \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \vec{NP} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$$

CIRCULATION ET FLUX

1. Circulation d'un champ de vecteurs

a) Circulation élémentaire

Soit une courbe orientée Γ reliant deux points M_1 et M_2 .



Circulation élémentaire de $\vec{f}(M)$, sur $d\vec{l}(M)$ le long de Γ : $\delta C = \vec{f}(M) \cdot d\vec{l}$

La norme du déplacement élémentaire étant fixée, la circulation élémentaire en M est d'autant plus grande que la norme du champ $\vec{f}(M)$ est importante en M et que l'angle entre le champ et le déplacement élémentaire tend vers zéro.

b) Circulation sur une courbe

circulation de $\vec{f}(M)$ entre les points M_1 et M_2 , le long de Γ (ou « sur Γ »)

intégrale curviligne $C_{M_1 \xrightarrow{\Gamma} M_2} = \int_{M \in \Gamma} \delta C = \int_{M \in \Gamma} \vec{f}(M) \cdot d\vec{l}$

La circulation le long de Γ sera « grande » si, en chaque point de Γ , le vecteur $\vec{f}(M)$ est intense et tangent à Γ (et de même sens).

Attention: cette intégrale dépend en général, non seulement de M_1 et M_2 mais aussi de la courbe Γ .

Exemple : si le champ de vecteur \vec{f} est un champ de forces subie par un point matériel M , sa circulation entre les points M_1 et M_2 , le long de Γ , est le travail de cette force lorsque M se déplace de M_1 à M_2 , le long de Γ .

c) Circulation sur une courbe fermée

La circulation le long d'un contour **fermé** Γ est notée avec le symbole \oint_{Γ} : $C_{\Gamma} = \oint_{M \in \Gamma} \vec{f}(M) \cdot d\vec{l}$

d) Champ de vecteurs à circulation conservative

Définition : Un **champ de vecteur est à circulation conservative** si et seulement si sa circulation le long de toute courbe fermée est nulle.

Propriété :

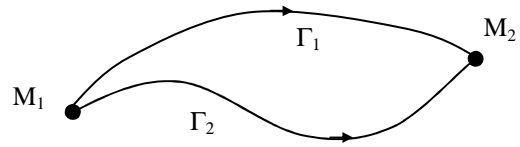
La circulation sur une courbe Γ d'un champ à circulation conservative, entre deux points M_1 et M_2 , ne dépend que des points M_1 et M_2 (elle ne dépend pas de la forme de Γ entre M_1 et M_2).

En effet, soit Γ_1 et Γ_2 deux courbes orientées de mêmes extrémités M_1 et M_2 , soit C_1 et C_2 les circulations respectives du champ de vecteurs \vec{f} le long de Γ_1 et Γ_2 . Soit Γ la courbe fermée, union de Γ_1 et Γ_2 . Soit C la circulation le long de Γ orientée par exemple comme Γ_2 .

\vec{f} étant à circulation conservative, $C=0$

Par ailleurs, $C=C_2-C_1$.

On déduit $C_1=C_2$ CQFD



Exemples (de champ à circulation conservative) :

- Le champ électrostatique \vec{E} est à circulation conservative : sa circulation entre deux points M_1 et M_2 est indépendante du chemin suivi, elle ne dépend que des points M_1 et M_2 :
- $$\int_{M_1 M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -[V(M_2) - V(M_1)]$$
- Le poids $m\vec{g}$ d'un point matériel est à circulation conservative : sa circulation (égale par définition au travail reçu par le point matériel) entre deux points M_1 et M_2 est indépendante du chemin suivi, elle ne dépend que des points M_1 et M_2 :
- $$\int_{M_1 M_2} m\vec{g} \cdot d\vec{l} = -[E_p(M_2) - E_p(M_1)] = -mg(z_2 - z_1)$$
 où l'altitude z est mesurée le long d'un axe vertical ascendant

2. Flux d'un champ de vecteurs

a) Flux élémentaire

Flux élémentaire de \vec{E} à travers l'élément de surface $d\vec{S}(M)$ de centre M :

$$d\phi(M) = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = E(M) \cdot dS \cdot \cos(\vec{E}, d\vec{S})$$

- Ce flux
- est proportionnel à la norme du champ \vec{E} en M
- est proportionnel à l'aire dS de l'élément de surface considéré
- dépend de l'angle $(\vec{E}, d\vec{S})$
- est algébrique : $d\phi > 0 \Leftrightarrow (\vec{E}, d\vec{S}) \in [0, \pi/2]$; $d\phi < 0 \Leftrightarrow (\vec{E}, d\vec{S}) \in [\pi/2, \pi]$

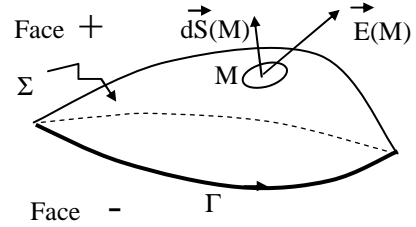
b) Flux à travers une surface non fermée

Une telle surface Σ est caractérisée par son contour Γ . Pour définir un flux (algébrique) à travers cette surface, on doit l'orienter, ce qui équivaut à orienter son contour. Le contour Γ ayant été orienté, l'orientation de la normale en un point M de Σ est donnée par la règle du tire-bouchon : le sens positif de la normale en M est le sens dans lequel en M , progresse un tire-bouchon qu'on tourne dans le sens positif de Γ . (On peut utiliser aussi la règle de la main droite : la main **droite** étant posée sur Γ , le sens + de Γ « sortant par les doigts », le sens + de la normale en un point M de la surface Σ est donné par le pouce : il « sort » du pouce).

Soit une surface orientée Σ .

Flux de \vec{E} à travers Σ :

$$\phi_{\Sigma} = \iint_{M \in \Sigma} d\phi(M) = \iint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$



Le flux du champ de vecteur \vec{E} à travers une surface Σ est « grand » si en chaque point de Σ , le champ est intense et normal à la surface (et de même sens).

Cas particuliers :

- Le champ $\vec{E}(M)$ est uniforme sur toute la surface Σ : $\phi_{\Sigma} = \vec{E} \cdot \left\{ \iint_{M \in \Sigma} d\vec{S}(M) \right\}$.
- Si de plus la surface Σ est plane, (notons S son aire et \vec{n} son vecteur normal unitaire) alors
- $\phi_{\Sigma} = \vec{E} \cdot S\vec{n} = ES \cos(\vec{E}, \vec{n})$ □
- Le flux est d'autant plus grand que le champ est intense, que la surface Σ est grande et que l'angle entre le champ et la normale est proche de zéro (i.e. que les lignes de champ percent Σ « normalement », dans le sens de \vec{n}).
- Si de plus la surface Σ est normale au champ alors $|\phi_{\Sigma}| = ES$
- La valeur absolue du flux est simplement le produit de la norme du champ par l'aire de la surface considérée.
- Le flux est une grandeur algébrique : $\phi_{\Sigma} = ES$ si les lignes de champ percent la surface dans le sens de \vec{n} ; $\phi_{\Sigma} = -ES$ si les lignes de champ percent la surface dans le sens opposé.
- Le champ $\vec{E}(M)$ n'est pas uniforme mais il est colinéaire au vecteur $d\vec{S}(M)$ en chaque point M : $\vec{E}(M) = E_n(M)\vec{n}$ et $d\vec{S}(M) = dS\vec{n}(M)$. Alors le calcul du flux se simplifie car dans l'intégrale, le produit scalaire s'écrit comme un simple produit : $\phi_{\Sigma} = \iint_{M \in \Sigma} E_n(M) \cdot dS$

c) Flux sortant à travers une surface fermée

Rappel : Concrètement, on appelle surface fermée une enveloppe délimitant un volume donné (une surface pour laquelle on peut définir l'intérieur et l'extérieur).

On appelle flux sortant à travers une surface fermée Σ , l'intégrale de surface :

$$\phi_{\text{sort}} = \oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_{\text{ext}}(M) \text{ où } d\vec{S}_{\text{ext}}(M) \text{ est le vecteur surface élémentaire de } \Sigma \text{ centré sur } M, \text{ orienté vers l'extérieur de } \Sigma.$$

Remarque : on précise qu'il s'agit d'une intégrale sur une surface fermée par le symbole \oiint_{Σ} .

d) champ de vecteur à flux conservatif

Définition

Un **champ de vecteur est à flux conservatif** si et seulement si son flux à travers toute surface fermée est nul.

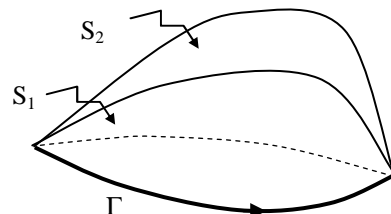
Exemple : Le champ magnétique est toujours à flux conservatif, quelle que soit sa source, qu'on soit en régime permanent ou non.

Remarque : le champ électrique n'est en général pas à flux conservatif. En effet, d'après le théorème de Gauss, le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par une distribution de charges D vérifie : $\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ (il n'est à flux conservatif que dans des zones vides de charges).

Propriétés d'un champ de vecteurs à flux conservatif (on le notera volontairement $\vec{B}(M)$)

- Le flux à travers une surface Σ s'appuyant sur un contour Γ , d'un champ de vecteurs à flux conservatif, ne dépend que du contour Γ , il est indépendant de la surface Σ : on parle alors de flux à travers le contour Γ .

En effet, considérons la surface fermée Σ constituée de la réunion de deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur le même contour orienté Γ . Notons ϕ le flux sortant à travers la surface fermée Σ , ϕ_1 et ϕ_2 les flux respectifs du champ à travers S_1 et S_2 orientées.



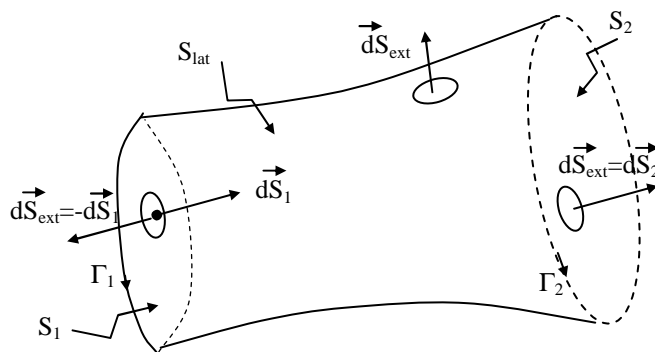
\vec{B} étant à flux conservatif, Σ étant fermée $\phi=0$.

Par ailleurs, $\phi = \phi_2 - \phi_1$

On déduit : $\phi_2 = \phi_1$ CQFD

- Le long d'un tube de champ, le flux d'un champ à flux conservatif, se conserve.

En effet, considérons la surface fermée Σ constituée d'un tube de champ du champ à flux conservatif et limitée par deux sections S_1 et S_2 orientées comme l'indique la figure. Notons ϕ le flux sortant à travers la surface fermée Σ , ϕ_{lat} le flux à travers la paroi latérale du tube de champ ($\phi_{lat}=0$ par définition du tube de champ), ϕ_1 et ϕ_2 les flux respectifs du champ à travers S_1 et S_2 orientées.



\vec{B} étant à flux conservatif, Σ étant fermée, $\phi=0$

Par ailleurs, $\phi = -\phi_1 + \phi_2 + \phi_{lat} = -\phi_1 + \phi_2$

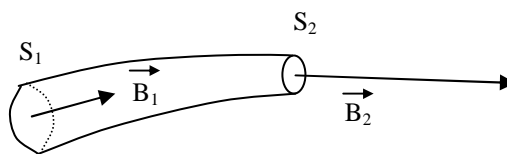
On déduit donc $\phi_1 = \phi_2$ CQFD

- L'intensité d'un champ à flux conservatif devient plus grande dans les régions où les lignes de champ se rapprochent.

En effet, considérons la surface fermée constituée d'un tube de champ élémentaire, et de deux sections (élémentaires) normales au champ S_1 et S_2 , (le champ étant considéré comme uniforme sur chacune, respectivement de norme B_1 et B_2). On a d'après la propriété précédente :

$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

Si les lignes de champ se resserrent (c'est-à-dire si $S_2 < S_1$), le champ s'intensifie ($B_2 > B_1$).



GRADIENT

1. Définition intrinsèque

Type : Le gradient est un **champ de vecteurs attaché à un champ scalaire** $f(M)$, que l'on note $\vec{\text{grad}}_M f$

Exemples : à partir du champ scalaire de température $\theta(M)$, on définit le champ de vecteurs « gradient de température » $\vec{\text{grad}}_M \theta$; à partir du champ scalaire de pression $P(M)$, on définit le champ de vecteurs « gradient de pression » $\vec{\text{grad}}_M P$; à partir du champ scalaire de potentiel électrique $V(M)$, on définit le champ de vecteurs « gradient de potentiel » $\vec{\text{grad}}_M V$...

Définition : Le gradient de f en M est tel que son produit scalaire par un vecteur déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ d'origine M , $\vec{MM}' = d\vec{OM}$ soit égal à la petite variation de la fonction f quand on passe de M à M' : $df = f(M') - f(M) = \vec{\text{grad}}_M f \cdot \vec{MM}'$

$$\vec{\text{grad}}_M f \text{ est défini par : } f(M') - f(M) = \vec{\text{grad}}_M f \cdot \vec{MM}' \text{ quand } M' \text{ tend vers } M \quad (\text{i.e. } df = (\vec{\text{grad}}_M f) \cdot d\vec{OM})$$

De cette définition, on déduit que le déplacement élémentaire à partir d'un point M , qui occasionne la plus forte variation de la fonction f , est un déplacement colinéaire au gradient de f en M , et de même sens. On en tire la signification pratique du gradient d'une fonction en un point M :

Le gradient en M de la fonction f est un **vecteur qui pointe vers la zone de plus forte valeur de f au voisinage immédiat de M** . Il a pour direction celle le long de laquelle f varie le plus fort autour de M . Sa norme traduit la rapidité de la variation de f le long de cette direction, au voisinage de M .

Le gradient caractérise la non uniformité du champ $f(M)$ (il est identiquement nul si et seulement si $df=0$, ie si et seulement si f est uniforme).

2. Composantes

- En cartésiennes

Le champ scalaire $f(M)$ est une fonction des trois coordonnées cartésiennes de M : $f(x,y,z)$. Sa différentielle s'écrit donc :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \text{ Le déplacement élémentaire s'écrivant } d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z, \text{ on déduit les}$$

composantes du gradient (puisque $df = \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{OM}$)

$$\text{En cartésiennes} \quad \vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

- En cylindriques

Le champ scalaire $f(M)$ est une fonction des trois coordonnées cylindriques de M : $f(\rho, \theta, z)$. Sa différentielle s'écrit donc :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \text{ Le déplacement élémentaire s'écrivant } d\vec{OM} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z, \text{ on déduit les}$$

composantes du gradient de $df = \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{OM}$:

$$\text{En cylindriques} \quad \vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

- En sphériques $f(r, \theta, \varphi)$, $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi$

$$\text{En sphériques} \quad \vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

3. Expression du gradient à l'aide de l'opérateur nabla

On appelle nabla l'opérateur vectoriel de composantes $\vec{\nabla} \begin{cases} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{cases}$

Le gradient d'un champ scalaire f s'exprime donc au moyen de ce vecteur par : $\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$

4. Surfaces "iso f" et gradient

L'équation $f(M)=\lambda$ définit la surface "iso f" (ou "équi f"), ensemble des points M ayant même valeur λ de la fonction f.

exemples

- " $P(M)=1013\text{hPa}$ " définit la surface isobare 1013hPa, ensemble des points où, à l'instant considéré, la pression vaut 1013hPa.
- " $V=1\text{kV}$ " définit la surface équipotentielle 1kV, ensemble des points où à l'instant considéré, le potentiel électrique vaut 1kV.

Propriétés :

- Deux surfaces "iso f" correspondant à deux valeurs de λ différentes ne peuvent pas se couper (la fonction f aurait deux valeurs différentes en un point d'intersection des deux surfaces, ce qui est absurde).
- Le vecteur gradient de f en un point M est normal à la surface "iso f" passant par M. Il est orienté vers les valeurs croissantes de f :

les lignes de champ du champ de vecteur $\vec{\text{grad}} f$ sont normales aux surfaces "iso f" et orientées vers les valeurs de f croissantes.

En effet, pour tout déplacement $d\vec{OM}$ s'effectuant au voisinage de M sur la surface "iso f" passant par M, on a $df=0$. D'après sa définition, le gradient de f en M est donc normal à tout déplacement $d\vec{OM}$ s'effectuant sur la surface "iso f", il est donc normal à la surface "iso f" passant par M.

Par ailleurs, quand on passe d'une surface "iso f" à une surface voisine correspondant à une plus grande valeur de f, on effectue un déplacement élémentaire avec $df>0$. La relation de définition du gradient, montre qu'il est bien orienté dans le sens du déplacement élémentaire effectué, c'est-à-dire selon les valeurs croissantes de f.

Exemple : potentiel électrique et champ électrostatique Soit la distribution « charge ponctuelle q, placée en un point A ».

On sait $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM}$. Les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques de centre A. Les lignes de champ du champ $\vec{\text{grad}} V$ sont des demi-droites passant par A (normales aux équipotentielles), orientées vers A si $q>0$ (le potentiel tend vers $+\infty$ quand on s'approche de la charge). Les lignes de champ du champ électrostatique $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ sont aussi des demi-droites passant par A, mais divergeant à partir de A si $q>0$ (le champ électrostatique est l'opposé de $\vec{\text{grad}} V$: il est orienté dans le sens des potentiels décroissants).

5. Circulation d'un champ de gradient

Calculons la circulation du champ $\vec{\text{grad}} f$ le long d'une courbe Γ fermée passant par un point A :

$$\oint_{\Gamma} \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} df = f(A) - f(A) = 0 \quad \text{un champ de gradient est à circulation conservative}$$

Exemple $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$: le champ électrostatique est à circulation conservative.